GUÍA DE APRENDIZAJE MATEMÁTICA

NOMBRE:	CURSO: 2 medio “ “	FECHA:
UNIDAD: Álgebra y funciones		
CONTENIDO: Función cuadrática		
OBJETIVO DE APRENDIZAJE N°3: Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c \quad con \quad a \neq 0$; • reconociendo la función cuadrática $f(x) = ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas • representándola en tablas y gráficos • determinando puntos especiales de su gráfica		

Función cuadrática

Definición de función cuadrática:

- Son funciones de segundo grado (el término mayor tiene exponente 2) y cuya expresión algebraica es de la forma: $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}, \quad con \quad a \neq 0.$
- Su gráfica es una curva que se llama **parábola**, en la que se distinguen las siguientes características fundamentales;

Características:

- **Concavidad: cóncava hacia arriba cuando el valor de $\boldsymbol{a}$ es positivo ($\boldsymbol{a > 0}$)** y la gráfica de la parábola es ∪ (los extremos de la gráfica se abren hacia arriba) y **cóncava hacia abajo cuando el valor de $\boldsymbol{a}$ es negativo ($\boldsymbol{a < 0}$)** y la gráfica será ∩ (los extremos de la gráfica se abren hacia abajo)
- **Intersección con eje Y:** número en la recta numérica donde se intersecta la parábola con el eje Y. Este punto es **(0, c),** donde c es el factor numérico que aparece cuando $\boldsymbol{x = 0}$ en la función $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$.

Ejemplo 1. Si la función cuadrática es $f(x) = 5x^2 - 2x + 8$, la gráfica se intersecta con el eje Y en el punto (0,8), ya que $a = 5, \; b = -2 \; y \; c = 8$.

Ejemplo 2. Si la función cuadrática es $f(x) = -x^2 + 1$, la gráfica se intersecta con el eje Y en el punto (0,1). Nótese que en esta función $a = -1, \; b = 0 \; y \; c = 1$

Ejemplo 3. Si la función cuadrática es $f(x) = -4x^2 - 7x$, la gráfica se intersecta con el eje Y en el punto (0,0), ya que $a = -4, \; b = -7 \; y \; c = 0$

Ejemplo 4. Si la función cuadrática es $f(x) = 7x - 9 + 3x^2$, la gráfica se intersecta con el eje Y en el punto $(0, -9)$, ya que $a = 3, \; b = 7 \; y \; c = -9$. En este caso debes darte cuenta que la función está escrita desordenada, por lo que debes **tener cuidado**.

Actividad 1: Identificar a, b y c de las siguientes funciones cuadráticas, completa la tabla, dejando la comprobación para el final. Debes Comprobar gráficamente la intersección con el eje Y utilizando un graficador de funciones online como por ejemplo, FooPlot, Geogebra (online, el programa o la aplicación), Mathway, etc. Escribe en Google graficador de funciones y te aparecerán varios, elige el que te sea más amigable.

$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$	a	b	c	Punto de interse. con el eje Y	Verificar en gráfica. Tic o x
Ej. $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 4x - 7}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{4}$	$\boldsymbol{-7}$	$\boldsymbol{(0, -7)}$	
$f(x) = 3x^2 - x + 2$					
$g(x) = x^2 + \frac{2}{3}x - 13$					
$h(x) = -7x^2$					
$i(x) = 5x^2 - 6x$					
$j(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{5}$					
$k(x) = 8x - x^2 + 1$					
$l(x) = 2x^2 - 4 - 5x$					

- **Intersección con eje X (ceros o raíces):** transformando la función a una ecuación y despejando x por medio de una factorización o aplicando la formula general en algunos casos, se encuentran los ceros o también llamadas raíces de la función y gráficamente corresponden a la intersección de la parábola con el eje X. En este caso $\boldsymbol{y = 0}$ y recordemos que $f(x) = y$, entonces la función quedaría como una ecuación de la forma $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ entonces $\boldsymbol{0 = ax^2 + bx + c}$ o $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ **(**transformándose en una ecuación)

Caso 1. Si la función es de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2}$, como $f(x) = -3x^2$, se debe despejar la x de la siguiente forma: transformando la función a ecuación, $-3x^2 = 0$ y se despeja x.

$$x^2 = \frac{0}{-3}$$
$$x^2 = 0$$
$$x = \sqrt{0}$$

$x = 0$, por lo tanto, la gráfica intersecta al eje x en (0,0), ya que $x = 0$ e $y = 0$

Ahora, grafica la función $f(x) = -3x^2$ en el graficador online y comprueba que la parábola intersecta al eje x en (0,0)

Caso 2. Si la función es de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + c}$, como $f(x) = 3x^2 - 12$, se debe despejar la x luego de reemplazar $y = 0$.

$y = 3x^2 - 12$

$0 = 3x^2 - 12$ o $3x^2 - 12 = 0$ que es lo mismo.

$3x^2 = 12$

$x^2 = \frac{12}{3}$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$ al aplicar la raíz se obtienen dos soluciones

$x = \pm 2$

$x_1 = +2$ y $x_2 = -2$

Ahora, grafica la función $f(x) = 3x^2 - 12$ en el graficador online y comprueba que la parábola intersecta al eje x en (2,0) y $(-2{,}0)$

Caso 3. Si la función es de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx}$, como $f(x) = -x^2 + 4x$, se debe despejar la x factorizando o aplicando la formula general.

Caso 4. Si la función es de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, como $f(x) = x^2 - 5x + 2$, se debe despejar la x factorizando cuando sea posible o aplicando la formula general.

Para los caso 3 y 4, consideraré encontrar las soluciones utilizando la formula general, ya que se puede aplicar a cualquier ecuación cuadrática (incluyendo caso 1 y 2), pero quien recuerde la factorización o quienes quiera buscarlo si no lo recuerda, estaría súper bien y agradecería tus ganas aprender más.

FÓRMULA GENERAL: $\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}}$ (recuerda el PAPOMUDAS para la cantidad subradical)

Ejemplo del caso 3: la función $f(x) = -x^2 + 4x$ tiene $a = -1,\ b = 4\ y\ c = 0$, los que se reemplazan en la fórmula general y se resuelve.

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{2 \cdot (-1)}$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 0}}{-2}$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 0}}{-2}$

$x = \frac{-4 \pm 4}{-2}$

$x_1 = \frac{-4+4}{-2}$ y $x_2 = \frac{-4-4}{-2}$

$x_1 = \frac{0}{-2}$ y $x_2 = \frac{-8}{-2}$ (recordar que $- \cdot - = +$)

$x_1 = 0$ y $x_2 = 4$ entonces la gráfica intersecta al eje x en (0,0) y (4,0)

Ejemplo del caso 4: la función $f(x) = x^2 - 5x + 2$ tiene $a = 1,\ b = -5\ y\ c = 2,$ los que se reemplazan en la fórmula general y se resuelve.

$$x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$$

$$x = \frac{+5 \pm \sqrt{25-4\cdot2}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-8}}{2}$$

$x = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ si $\sqrt{16} = 4$, entonces $\sqrt{17}$ es aproximadamente 4,1

$x_1 \approx \frac{5+4,1}{2}$ y $x_2 \approx \frac{5-4,1}{2}$ valores aproximados y se simboliza con $\approx$

$x_1 \approx \frac{9,1}{2}$ y $x_2 \approx \frac{0,9}{2}$

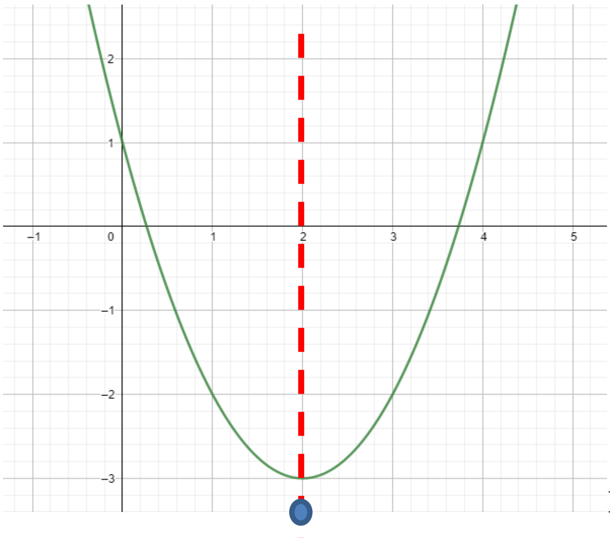
$x_1 \approx 4,6$ y $x_2 \approx 0,45$ entonces la gráfica intersecta al eje x en (4,6 ; 0) y (0,45 ; 0)

Ahora, grafica las funciones en el graficador online y comprueba que la parábola intersectan en dichos puntos.

- **Eje de simetría:** línea imaginaria que divide a la parábola en dos partes iguales (simétricas), por lo que siempre debe pasar por el vértice de la parábola, coincidiendo así, la coordenada x del vértice con el eje de simetría. La fórmula para saber en qué lugar pasa el eje de simetría es $\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$

Ejemplo: si la función es $f(x) = x^2 - 4x + 1$, donde $a = 1,\ b = -4\ y\ c = 1$

Se debe reemplazar en la fórmula, $x = \frac{-(-4)}{2\cdot1}$ que da como resultado $x = \frac{4}{2} = 2$



El eje de simetría se representa con una línea punteada

- **Vértice:** es el punto más bajo de la parábola sí es de la forma $\cup$ $(a > 0)$ y el punto más alto de la parábola si es de la forma $\cap$ $(a < 0)$. El vértice se representa con un punto (x, y), donde x se calcual de la misma forma que el eje de simetría ya que estas coinciden en x. Para calcular el valor de y se debe reemplazar en la función el valor de x encontrado.

Ejemplo: si la función es $f(x) = x^2 - 4x + 1$, reemplazamos en $x = \frac{-b}{2a}$ y nos da como resultado $x = 2$ (al igual que en el eje de simetría) y este se reemplaza en la función para encontrar y.

$y = x^2 - 4x + 1$
$y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1$
$y = 4 - 8 + 1$
$y = -3$ Por lo tanto, el vértice de la parábola se encuentra en $(2, -3)$, verificar en la gráfica anterior.

Actividad 2: encontrar las características anteriores mencionadas y grafica para comprobar tus cálculos.

Ejemplo. Sea la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ donde $a = 1,\ b = -4\ y\ c = 3$

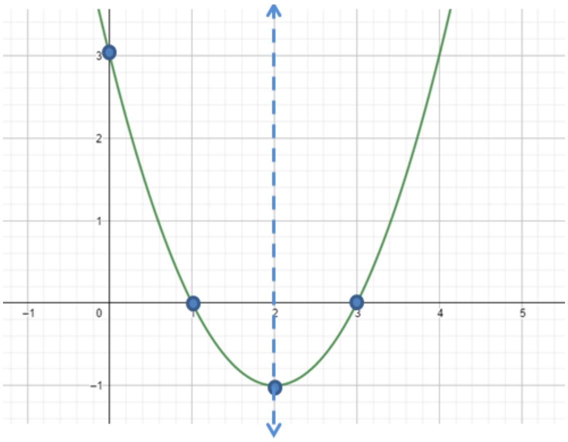
- **Concavidad:** cóncava hacia arriba, pues $a = 1$ es positivo ($a > 0$)
- **Intersección con el eje Y:** $c = 3$, por lo tanto, la parábola intersecta al eje Y en el punto (0,3)
- **Intersección con el eje X:** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2}$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$
$$x_1 = \frac{4+2}{2} \quad y \quad x_2 = \frac{4-2}{2}$$
$$x_1 = \frac{6}{2} \quad y \quad x_2 = \frac{2}{2}$$
$x_1 = 3$ y $x_2 = 1$ la parábola intersecta al eje X en (3,0) y (1,0)

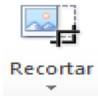
- **Eje de simetría:** $x = \frac{-b}{2 \cdot a}$ sería $x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$, entonces el eje de simetría pasa por $x = 2$
- **Vértice:** al reemplazar en $x = \frac{-b}{2 \cdot a}$ nos da $x = 2$ y este valor, se reemplaza en la función

  $y = x^2 - 4x + 3$
  $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3$
  $y = 4 - 8 + 3$
  $y = -1$ y con estos cálculos sabremos que el vértice esta en $(2, -1)$

- **Gráfica:** la gráfica es cóncava hacia arriba, con vértice en (2,-1), intersección con el eje y en (0,3) e intersección con el eje x en (1,0) y en (3,0)



Ahora es tu turno. Encuentra las características de una función cuadrática mencionadas anteriormente (concavidad, intersección con el eje Y, intersección con el eje X, eje de simetría, vértice y gráfica), para cada una de las siguientes funciones. Las gráficas debes realizarla en un graficador de funciones online, imprimir pantalla para insertarla en la guía o en un Word y recortar los bordes para que quede solo la gráfica



1. $f(x) = 4x^2$ observa que $b = 0 \;\; y \;\; c = 0$

2. $i(x) = x^2 - 8x + 7$

3. $g(x) = x^2 + 3x + 2$

4. $h(x) = -2x^2 + 6x$ $(c = 0)$

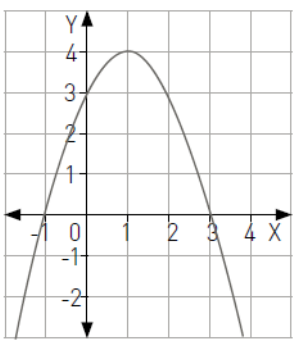
5. $j(x) = 3x^2 - 6$ $(b = 0)$

6. $k(x) = -x^2 + 5x - 4$

7. $l(x) = 2x^2 - 8x + 6$

Actividad 2: Analiza cada afirmación con respecto al gráfico de la función h(x). Luego, escribe V o F según corresponda, justifica.

1. _____Se representa algebraicamente con la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$.
   Justificación:
2. _____Los ceros de la función h(x) son $x_1 = 1 \; y \; x_2 = -3$.
   Justificación:
3. _____Los valores $x = 0 \; y \; x = 2$ en f tienen la misma imagen.
   Justificación:
4. _____El vértice es encuentra en $(-1{,}4)$.
   Justificación:



Actividad 3: Lee atentamente los siguientes enunciados y sus correspondientes alternativas, realiza los cálculos necesarios y encierra con un círculo la alternativa correcta.

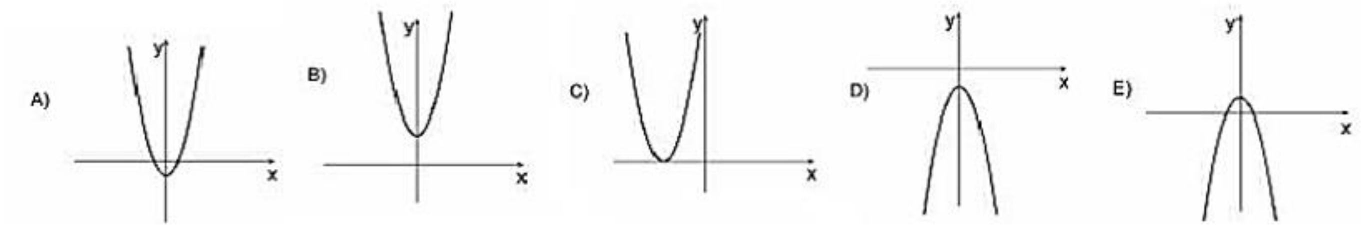
1. ¿En qué punto intersecta al eje Y el grafico de la función $y = -x^2 + 4x + 6$?

   A) En $(0, -6)$
   B) En $(0, -1)$
   C) En $(0,4)$
   D) En $(0,6)$
   E) En $(0, -4)$

2. Según la función $f(x) = -5x^2 - 6x + 9$ se sabe que:

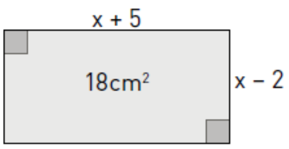
   A) Es cóncava hacia arriba y el eje de simetría esta en X = 6
   B) Es cóncava hacia abajo y el eje de simetría esta en X = -6
   C) Es cóncava hacia arriba e intersecta el eje y en (0,9)
   D) Es cóncava hacia abajo e intersecta el eje y en (0,9)
   E) Es cóncava hacia abajo y el eje de simetría esta en X = $\frac{3}{5}$

3. ¿Cuál de las siguientes figuras representa mejor la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$?



Planteamiento de situación

1. Con la información de la figura, calcular la longitud de los lados, área y perímetro del rectángulo.



2. La altura en metros con respecto al tiempo t, en segundos, de la trayectoria de una flecha está dada por la función $f(t) = -t^2 + 5t$.
   a) ¿Cuantos metros de altura alcanza la flecha a los 3 segundos?

   b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la flecha y a los cuantos segundos?

   c) ¿Cuántos segundos esta la flecha en el aire?

Autoevaluación:

1. ¿Qué tanto consideras que te esforzaste? (mucho, podría haber sido más o sólo un poco)
2. ¿Sientes que fuiste perseverante para comprender el contenido y hacer las actividades? (mucho, podría haber sido más o sólo un poco)